Die Mathematik von Dr. Eureka

Infos zum Spiel

Das Spiel “Dr. Eureka” ist im Pegasus Spiele Verlag erschienen. Es gibt insgesamt 12 Reagenzgläser, 24 Molekül-Kugeln, davon 8 grüne, 8 violette und 8 blaue sowie 54 Aktionskarten. Das Spiel ist für maximal 4 Spieler ausgelegt, wobei die Mindestanzahl an Spielern bei 2 Personen liegt.
Jeder Spieler bekommt 3 Reagenzgläser und 6 Molekül-Kugeln, jeweils zwei von den drei verschiedenen Farben. Nun wird eine Karte gezogen. Die dort abgebildete Kombination aus den 6 Kugeln muss so schnell wie möglich in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Die Schwierigkeit dabei ist, dass man die Kugeln nur “umschütten” darf. Daher soll man nur die Reagenzgläser, nicht aber die Kugeln, berühren. Bei korrekten Lösen der Aktionskarte, darf man sich diese nehmen. Wer als erstes 5 Karten gesammelt hat, gewinnt das Spiel.

Fragestellung der Mathematik-AG

Die Arbeitsgemeinschaft Mathematik hat sich das Spiel angesehen und versucht eine mathematische Fragestellung zu finden, die sie untersuchen will. Dabei ist folgende Frage entstanden:

Wie viele verschiedene Karten zum Spiel könnte man drucken?

Rahmenbedingungen

Auf jeder Karte sind drei Reagenzgläser abgebildet, auf die die sechs Kugeln verteilt werden. Dabei können in jedem Glas 0 bis 4 Kugeln sein. Die Reihenfolge der Kugeln im Glas, sowie die Reihenfolge der Gläser spielen eine Rolle.
Die Mathe-AG hat sich überlegt, dass es nicht ganz trivial (offensichtlich) ist, sondern man die Zusammenstellung der Kugeln in den Reagenzgläsern auf der Karte in zwei Schritte zerlegen muss. Zunächst ignoriert man die Reagenzgläser und sucht alle möglichen Anordnungen der 6 Kugeln in einer Reihe. Danach wird diese Reihe auf die Reagenzgläser aufgeteilt.

Simulation durch Ziehen von Kugeln: Teil I

Anzahl möglicher Ketten von 6 Kugeln

Wir stellen uns die Lösung in zwei Schritten vor. Zuerst ordnen wir die sechs Kugeln in eine zufällige Reihenfolge. Danach trennen wir die Reihe zufällig an zwei Stellen ab, sodass wir drei kleinere Reihen mit jeweils 0-4 Kugeln haben.

Hätten wir sechs verschiedene Kugeln in einer Urne (einer Schüssel) und würden eine davon blind ziehen (zufällig auswählen), wie viele Möglichkeiten gäbe es dann, für verschiedene Ereignisse? Es wären sechs! Wenn die erste Kugel jetzt nicht mehr in der Urne ist, gibt es nur noch fünf Kugeln. Es sind also auch nur noch fünf Möglichkeiten für die zweite Kugel. Aber wie viele Möglichkeiten waren es jetzt insgesamt? Es sind sechs mal fünf, also schon dreißig Möglichkeiten. Bei der dritten Kugel, gibt es noch vier Möglichkeiten. Insgesamt sind es sechs mal fünf mal vier Möglichkeiten, usw. Das wiederholen wir, bis die Urne leer ist. Es ergeben sich 6*5*4*3*2*1 = 720 Möglichkeiten.
In der Mathematik nennt man das eine Permutation. Es gibt 720 Permutationen von 6 verschiedenen Elementen.
6*5*4*3*2*1, also das Produkt von einer natürlichen Zahl mit jeder natürlichen Zahl, die kleiner ist als sie selbst, nennt man Fakultät. Man würde schreiben 6! = 6*5*4*3*2*1

Die Schwierigkeit besteht darin, dass jede Farbe nicht nur einmal vorkommt, sondern dass es jeweils zwei rote, zwei grüne und zwei blaue Kugeln gibt.
Also müssen wir die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit Wiederholung betrachten. Die Formel dazu lautet:

$$W = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{8} = 90$$

An der Formel erkennt man, dass die berechnete Zahl n! dreimal durch zwei geteilt wurde. Dies liegt daran, dass es von jeder der drei Farben zwei Kugeln gibt. Denn in jeder Kombination kann man z.B. die zwei blauen Kugeln vertauschen und hat dann wieder die selbe Kombination. Da man immer die zwei roten, die zwei blauen und die zwei grünen hat, muss man dreimal durch zwei teilen.

Nachdem diese Anordnung erfolgt ist, können wir uns auf das Trennen der Kette in drei Bereiche konzentrieren, was man im Teil II sehen kann.

Simulation durch Ziehen von Kugeln: Teil II

Anzahl möglicher Unterteilungen der Ketten

Im nächsten Schritt muss man die Kette in drei Teile teilen. Es müssen zwei Schnitte so gesetzt werden, dass minimal 0 und maximal 4 Kugeln in einer Teilkette sind. Alle diese Möglichkeiten sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

RG1	RG2	RG3
0	2	4
0	3	3
0	4	2
1	1	4
1	2	3
1	3	2
1	4	1
2	0	4
2	1	3
2	2	2

RG1	RG2	RG3
2	3	1
2	4	0
3	0	3
3	1	2
3	2	1
3	3	0
4	0	2
4	1	1
4	2	0

Wir sind alle Zahlen von 0 bis 4 als Anzahlen der Kugeln in Reagenzglas 1 durchgegangen und haben dabei für die Reagenzgläser 2 und 3 die Möglichkeiten zur Verteilung der restlichen Kugeln, unter Berücksichtigung der Anzahl in Reagenzglas 1, ausprobiert. In der Tabelle sind die Zahlen so eingetragen, dass die drei Ziffern als dreistellige Zahl gelesen aufsteigend sortiert sind, um überprüfen zu können, dass keine Kombinationsmöglichkeit vergessen wird. So sind wir auf auf insgesamt 19 verschiedene Möglichkeiten gekommen.

Gesamtanzahl möglicher Karten

Da jede mögliche Anordnung der Kugeln auf jede mögliche Weise in drei Teilketten unterteilt werden kann, muss man die beiden berechneten Zahlen multiplizieren: 90 * 19 = 1710. Da sowohl die Anordnung der Kugeln im Reagenzglas als auch die Reihenfolge der Reagenzgläser auf den Karten eine Rolle spielen, sind alle Kombionationsmöglichkeiten im Laufe des Spiels unterschiedlich und man könnte somit 1710 verschiedene Karten herstellen.

Im Spiel ist jedoch eine deutlich kleine Anzahl von Karten, nämlich 54 enthalten. Nach welchem Prinzip die Karten vom Verlag ausgewählt wurden, ist nicht bekannt.

Mitwirkende

Folgende Schüler:innen haben bei der Berechnung der Kombinationsmöglichkeiten und der Aufbereitung des Lösungsweges mitgewirkt:

KatHansc	MosMayer	CarMorit	WilPiepe	LucRackw
JulStein	NilStein	MaiUmlau	LeoWoehl	WilWolf