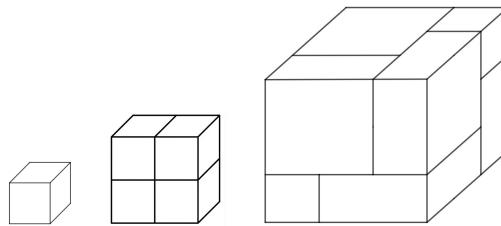


Der 7x7x7-Conway-Cube

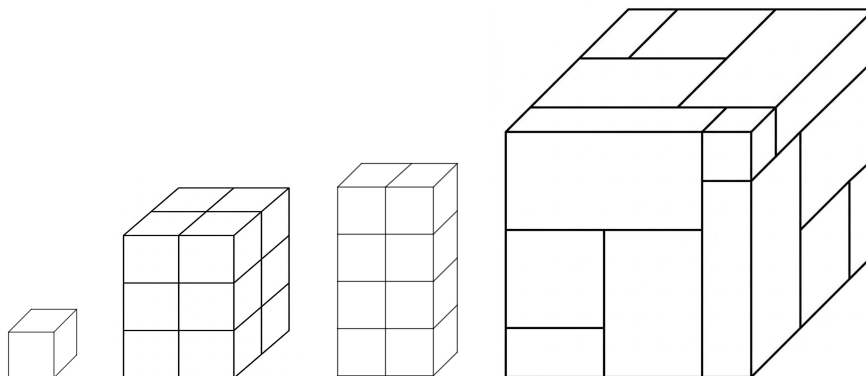
Basierend auf dem Conway-Cube hat die Mathe-AG ein neues Knobelspiel entwickelt. Bekannt waren der originale Conway-Würfel mit den Maßen 3x3x3 und ein weiteres Knobelspiel mit den Maßen 5x5x5.

Ausgangslage

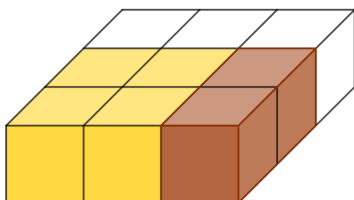
Der kleinere beider Würfel setzt sich aus drei einzelnen 1x1x1-Würfelchen und sechs weiteren Quadern mit den Proportionen 1x2x2 zusammen. Sein Volumen beträgt insgesamt 27 Würfelchen.



Die Aufbau des zweiten Würfels besteht aus fünf einzelnen Würfelchen und zwölf weiteren Quadern. Sechs davon haben die Maße 2x2x3 und die restlichen sechs bestehen aus 1x2x4 Würfelchen. Das Volumen beträgt insgesamt 125 Würfelchen.



Auffallend ist, dass sich die beiden Würfel unter Beachtung der Einzelteile um die Diagonale rotieren lassen, weshalb die Würfel symmetrisch aufgebaut sind und die einzelnen Würfelchen auf einer Raumdiagonale, der Symmetrieachse angeordnet sein müssen.



Diese Anordnung der einzelnen Würfelchen erklärt sich durch die ungerade Anzahl von Würfelchen in jeder Schicht. Beim 3x3x3-Würfel besteht eine Schicht aus neun Würfelchen. Der 1x2x2-Quader trägt zu jeder Schicht entweder zwei oder vier Würfelchen bei (siehe Abbildung). Aus Addition der Zahlen 2 und 4 lassen sich nur gerade Zahlen bilden. Die ungerade Zahl 9 wird durch das einzelne Würfelchen erreicht.

Solche Schichten gibt es im Würfel in allen drei Raumrichtungen: drei Schichten übereinander, drei von vorne nach hinten und drei von links nach rechts. Sind die einzelnen Würfelchen auf der Raumdiagonale angeordnet, so ist in jeder Schicht ein Würfelchen und das bei allen drei Betrachtungsweisen.

Ansätze und Ziel

Die Arbeitsgemeinschaft Mathematik des MCG hatte das Ziel, einen 7x7x7-Würfel aus 343 Würfelchen nach dem gleichen Prinzip zu entwickeln. Auch bei dieser Variante sollten die einzelnen Würfelchen auf einer Raumdiagonale liegen und alle Teile rotationssymmetrisch zu dieser Raumdiagonale angeordnet sein. Daher werden 7 einzelne Würfelchen benötigt.

Es sind nur Knobelspiele dieser Art mit ungeraden Kantenlängen möglich, da die Grundidee des 3x3x3 und des 5x5x5 Würfels darin besteht, dass in jeder Schicht eine ungerade Anzahl von Würfeln vorhanden ist. Daher wurde als Ziel ein 7x7x7 Würfel gewählt.

Weiterhin wurde vermutet, dass der 7x7x7-Würfel aus mindestens 4 verschiedenen Typen von Bausteinen besteht, da die beiden kleineren Varianten aus zwei bzw. drei verschiedenen Typen bestehen. Die einzelnen Würfelchen werden dabei als ein Typ von Bausteinen mitgezählt.

Zudem kommen bei den Würfeln mit der Kantenlänge 3 und 5 bis auf die Einerwürfel alle Teile genau sechs mal vor, weswegen die Idee aufkam, dass dies bei dem größeren Würfel genauso sein könnte. Wenn man die Anzahl der Würfelchen ohne diejenigen auf der Symmetrieachse durch 6 teilt, erhält man die Summe der Würfelchen der drei gesuchten Quader. Als Gleichung ausgedrückt:

$$(343 - 7) : 6 = 56$$

Nimmt man also von jedem Typ von Bausteinen einen und addiert deren Volumina (Würfelchen), so ergibt dies 56.

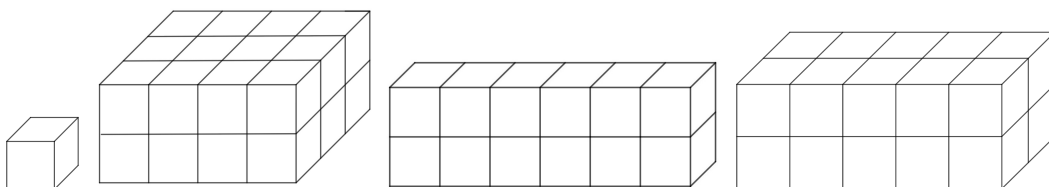
Es ist zu erwarten, dass sich die Anzahl verschiedener Quader beim 7x7x7-Würfel um mindestens eins erhöht, da der 3x3x3-Würfel aus zwei verschiedenen Quadern und der 5x5x5-Würfel aus drei verschiedenen Quadern besteht.

Die unterschiedlichen Quader müssen zu jeder Schicht des 7x7x7-Würfels eine gerade Anzahl an Würfelchen beitragen. Auch hier muss das für alle drei Dimensionen gelten. Daraus folgt, dass nur Quader möglich sind, bei denen maximal eine der drei Kantenlängen ungerade ist, und die folgende Gleichung erfüllen:

$$7 + 6 \cdot (x_1 \cdot y_1 \cdot z_1) + 6 \cdot (x_2 \cdot y_2 \cdot z_2) + 6 \cdot (x_3 \cdot y_3 \cdot z_3) = 343$$

Lösung

Wir haben uns eine Konfiguration überlegt, welche beide Vorgaben erfüllt. Diese sieht wie folgt aus:

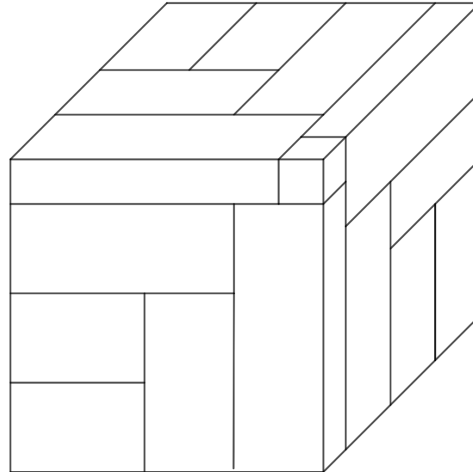


Sie erfüllt beide Gleichungen:

$$(2 \cdot 3 \cdot 4) + (1 \cdot 2 \cdot 6) + (2 \cdot 2 \cdot 5) = 56$$

$$7 + 6 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4) + 6 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 6) + 6 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 5) = 343$$

Erfreulicherweise hat sich ergeben, dass diese Konfiguration sich zu einem Würfel nach dem bekannten Schema zusammensetzen lässt. Dies haben wir experimentell herausgefunden.



Arbeitsgemeinschaft Mathematik

Der 7x7x7 Conway-Cube wurde von der Arbeitsgemeinschaft Mathematik des Marie-Curie-Gymnasiums Hohen Neuendorf unter der Leitung von Marcus Wagner entwickelt. Die Idee entstand auf Basis der 3x3x3- und 5x5x5-Conway-Würfel im Mathematikum Gießen.

Pseudonyme der beteiligten Schüler:innen:

Ann Schme, Ant Socha, Emm Bilat, Ged Delat, Jur Sunti, Kai Stein, Lou Immis, Mik Wolff, Osk Karda, Sop Neuma, Vin Ring

Hohen Neuendorf, im August 2026

